

A MISTURA DE ACOPLAMENTOS VETORIAL E ESCALAR PARA UM POTENCIAL DEGRAU NA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON. Tatiana Ramos Cardoso, Antonio Soares de Castro. Iter-áreas - Física - Departamento de Física e Química - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - Campus de Guaratinguetá.

A generalização da mecânica quântica que inclui a relatividade especial é necessária para a descrição de fenômenos em altas energias e também para a descrição de fenômenos em escalas de comprimentos que são menores ou comparáveis com o comprimento de onda Compton da partícula ($\lambda = \hbar/(mc)$). A generalização não é uma tarefa trivial e novos e peculiares fenômenos surgem na Mecânica Quântica Relativística (MQR). Entre tais fenômenos estão a produção espontânea de pares matéria-antimatéria e a limitação para a localização de partículas. Essa limitação pode ser estimada pela observação que a máxima incerteza para o momento da partícula $\Delta p = mc$ conduz, via princípio da incerteza de Heisenberg, à incerteza mínima na posição $\Delta x = \lambda/2$ [1]-[2].

As mais simples equações da MQR são a equação de Klein-Gordon (EKG), que descreve o comportamento de partículas de spin 0, e a equação de Dirac, que descreve o comportamento de partículas de spin 1/2. O spin é uma complicação adicional na MQR e, naturalmente, a EKG permite que certos aspectos da MQR possam ser analisados com um formalismo matemático mais simples e percebidos com maior transparência. A solução da equação de Dirac com o potencial degrau, considerado como o componente temporal de um potencial vetorial, é bem conhecida e cristalizada em livros-texto [1]-[5]. Neste problema surge o célebre paradoxo de Klein [6] para potenciais suficientemente intensos, um fenômeno em que o coeficiente de reflexão excede a unidade e é interpretado como sendo devido à criação de pares na interface do potencial. A análise do problema consoante a EKG não foi esquecida [5], [7]-[10].

Neste trabalho analisamos a EKG unidimensional com interações externas com a mais geral estrutura de Lorentz, i.e., consideramos potenciais com estrutura vetorial, com componentes espacial e temporal, acrescido de uma estrutura escalar. Em seguida exploramos as soluções para um potencial degrau com acoplamento geral, por assim dizer, com uma mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar. Verificamos que tal mistura de acoplamentos conduz a resultados surpreendentes. Para além de aumentar o limiar para a produção espontânea de pares, podendo até mesmo frustrar a produção ainda que os potenciais sejam extremamente fortes, a presença de um acoplamento escalar permite que a partícula possa ser localizada em uma região do espaço arbitrariamente pequena sem ameaçar a interpretação de partícula única da EKG. A aparente violação do princípio da incerteza é remediada com a introdução do conceito de comprimento de onda Compton efetivo.

A EKG unidimensional para uma partícula livre de massa de repouso m corresponde à relação energia-momento relativística $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$, onde a energia E e o momento p tornam-se operadores, $i\hbar \partial/\partial t$ e $-i\hbar \partial/\partial x$ respectivamente, atuando sobre a função de onda $\Phi(x, t)$. Na presença de potenciais externos a relação energia-momento torna-se

$$(E - V_t)^2 = c^2 \left(p - \frac{V_e}{c} \right)^2 + (mc^2 + V_s)^2 \quad (1)$$

onde os subscritos nos termos dos potenciais denotam suas propriedades com respeito às transformações de Lorentz: t e e para os componentes temporal e espacial de um potencial vetorial¹, e s para um potencial escalar². Para potenciais externos independentes do tempo, a EKG admite soluções da forma

$$\Phi(x, t) = \phi(x) e^{i\Lambda(x)} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (2)$$

¹A energia e o momento são os componentes temporal e espacial, respectivamente, da quantidade $(E/c, p)$, a qual se comporta, segundo as transformações de Lorentz, como um vetor. O potencial vetorial, com componentes (V_t, V_e) , é acoplado à partícula de acordo com o *princípio do acoplamento mínimo* $E \rightarrow E - V_t$ e $p \rightarrow p - V_e/c$, como é habitual no caso da interação eletromagnética.

²A massa de repouso é uma quantidade invariante de Lorentz, i.e., uma quantidade escalar. O potencial escalar foi acoplado à partícula em (1) de acordo com o *princípio do acoplamento mínimo* $m \rightarrow m + V_s/c^2$. Esta prescrição fornece o limite não-relativístico apropriado da EKG, conforme veremos adiante, em contraste com a regra $m^2 \rightarrow m^2 + V_s^2/c^4$ empregada na Ref. [1].

onde ϕ obedece a uma equação similar em forma à equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\frac{V_s^2 - V_t^2}{2mc^2} + V_s + \frac{E}{mc^2} V_t \right) \phi = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \phi \quad (3)$$

com $\Lambda(x) = \int^x dy V_e(y)/(\hbar c)$. A equação da continuidade para a EKG, $\partial\rho/\partial t + \partial J/\partial x = 0$, é satisfeita neste caso com ρ e J dados por

$$\rho = \frac{E - V_t}{mc^2} |\phi|^2, \quad J = \frac{\hbar}{2im} \left(\phi^* \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi^*}{\partial x} \phi \right) \quad (4)$$

Em virtude de ρ e J serem independentes do tempo, a solução é dita descrever um estado estacionário. Observa-se que a densidade pode admitir valores negativos mesmo no caso de uma partícula livre. Assim sendo ρ não pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade³. Ademais, deve-se mencionar que a EKG reduz-se à equação de Schrödinger no limite não-relativístico ($E \simeq mc^2$ e energias potenciais pequenas comparadas com mc^2) com um potencial dado por $V_t + V_s$ e energia dada por $E - mc^2$. No limite não-relativístico as naturezas de Lorentz dos potenciais não sofrem quaisquer distinções, e a densidade e a corrente reduzem-se exatamente aos valores da teoria não-relativística.

Vamos agora considerar a EKG com os potenciais externos independentes do tempo na forma de um degrau de potencial. Consideramos $V_e = 0$, haja vista que o componente espacial do potencial vetorial contribui apenas com um fator de fase local para $\Phi(x, t)$ e não contribui para a densidade nem para a corrente. O potencial degrau é expresso como $V(x) = V_0\theta(x)$, onde $V_0 > 0$ e $\theta(x)$ é a função de Heaviside. Os potenciais vetorial e escalar são escritos como $V_t(x) = g_t V(x)$ e $V_s(x) = g_s V(x)$ de tal forma que as constantes de acoplamento estão sujeitas ao vínculo $g_t + g_s = 1$, com $g_t \geq 0$ e $g_s \geq 0$.

Para $x < 0$, a EKG apresenta soluções na forma de uma soma de autofunções do operador momento: $\phi = A_+ e^{+ikx} + A_- e^{-ikx}$ onde $\hbar ck = \sqrt{E^2 - m^2c^4}$. Para $|E| > mc^2$, a solução reverte-se em ondas planas propagando-se em ambos os sentidos do eixo X com velocidade de grupo igual à velocidade clássica da partícula. Se escolhermos partículas incidindo sobre a barreira de potencial ($E > mc^2$) teremos que $A_+ e^{+ikx}$ descreve partículas incidentes ($v_g = c^2\hbar k/E > 0$), enquanto $A_- e^{-ikx}$ descreverá partículas refletidas ($v_g = -c^2\hbar k/E < 0$). A corrente nesta região do espaço é expressa por $J = \hbar k (|A_+|^2 - |A_-|^2)/m$. Observe que a relação $J = \rho v_g$ mantém-se tanto para a onda incidente quanto para a onda refletida pois $\rho = E|\phi|^2/(mc^2) > 0$.

Por outro lado, para $x > 0$ devemos ter $v_g \geq 0$, de forma que a solução nesta região do espaço descreve uma onda evanescente ou uma onda progressiva que se afasta da interface do potencial. A solução geral tem a forma $\phi = B_+ e^{+i\kappa x} + B_- e^{-i\kappa x}$, onde $\hbar c\kappa = \sqrt{(E - g_t V_0)^2 - (mc^2 + g_s V_0)^2}$. Por causa da dupla possibilidade de sinais para a energia de um estado estacionário, a solução $B_- e^{-i\kappa x}$ não pode ser descartada a priori. De fato, pode-se depreender que esta parcela pode vir a descrever uma onda progressiva com energia negativa e velocidade de fase $v_f = |E|/(\hbar\kappa) > 0$. Percebe-se destarte que podemos segregar três classes distintas de soluções:

- **Classe A:** Para $V_0 < E - mc^2$ temos que $\kappa \in \mathbb{R}$ e a solução que descreve ondas planas propagando-se no sentido positivo do eixo X com velocidade de grupo $v_g = c^2\hbar\kappa/(E - g_t V_0)$ é possível somente se $B_- = 0$. Neste caso, a densidade e a corrente são dadas por $\rho = (E - g_t V_0) |B_+|^2/(mc^2)$ e $J = \hbar\kappa |B_+|^2/m$.
- **Classe B:** Para $E - mc^2 < V_0 < V_c$, onde $V_c = (E + mc^2)/(2g_t - 1)$ para $g_t > 1/2$ e $V_c = \infty$ para $g_t \leq 1/2$, temos que $\kappa = i|\kappa|$ de forma que a solução, com $B_- = 0$, descreverá uma onda evanescente em $x > 0$. Neste caso, $\rho = (E - g_t V_0) |B_+|^2 \exp(-2|\kappa|x)/(mc^2)$ e $J = 0$.
- **Classe C:** $V_0 > V_c$, com V_c concebido na classe **B**, surge mais uma vez a possibilidade de propagação no sentido positivo do eixo X , desta feita com $B_+ = 0$, com velocidade de grupo $v_g =$

³Pauli e Weisskopf [11] mostraram que não há dificuldade com a interpretação da densidade e da corrente da EKG se essas grandezas forem interpretadas como densidade e corrente de *carga*, ao invés de densidade e corrente de probabilidade.

$c^2\hbar\kappa/(g_t V_0 - E)$. Nesta circunstância em que o acoplamento vetorial excede o acoplamento escalar nos defrontamos com um caso bizarro, pois tanto a densidade quanto a corrente são quantidades negativas, viz. $\rho = (E - g_t V_0) |B_-|^2/(mc^2)$ e $J = -\hbar\kappa |B_-|^2/m$. A manutenção da relação $J = \rho v_g$, contudo, é uma licença para interpretar $B_- e^{-i\kappa x}$ a descrever a propagação, no sentido positivo do eixo X , de partículas com carga de sinal contrário ao das partículas incidentes. Esta interpretação é consistente se as partículas propagando-se nessa região têm energia $-E$ e estão sob a influência de um potencial vetorial $-g_t V_0$. Quer dizer, então, que a onda progressiva descreve, de fato, a propagação de antipartículas no sentido positivo do eixo X .

A demanda por continuidade de ϕ e $d\phi/dx$ fixa as amplitudes de onda em termos da amplitude da onda incidente e permite a determinação dos coeficientes de reflexão R e transmissão T . O coeficiente de reflexão (transmissão) é definido como a razão entre as correntes refletida (transmitida) e incidente. Haja vista que $\partial\rho/\partial t = 0$ para estados estacionários, temos que a corrente é independente de x . Usando este fato obtemos que $R + T = 1$, como deve ser. Entretanto, a classe **C** apresenta $R > 1$, o aludido paradoxo de Klein, implicando que mais partículas são refletidas na barreira de potencial que aquelas incidentes. Tem que ser assim porque, conforme vimos anteriormente, o componente vetorial da barreira de potencial estimula a produção de antipartículas em $x = 0$. Em virtude da conservação da carga há, em verdade, a criação de pares partícula-antipartícula e, como o potencial vetorial em $x > 0$ é repulsivo para partículas, elas serão necessariamente refletidas. Não apenas a carga é conservada. Visto que os pares produzidos em $x = 0$ têm energias de sinais contrários, conclui-se que a energia também é uma quantidade conservada no processo de criação de pares.

Da discussão relacionada com as classes **B** e **C**, observa-se que o limiar para a produção de pares é dado por V_c , quer dizer $(E + mc^2)/(2g_t - 1)$ para $g_t > 1/2$, e ∞ para $g_t \leq 1/2$. Donde torna-se evidente que o acoplamento escalar resulta no aumento da energia mínima necessária para a criação de pares partícula-antipartícula. O valor mínimo do limiar ($V_0 = 2mc^2$) ocorre quando o acoplamento é puramente vetorial ($g_t = 1$). A adição de um contaminante escalar contribui para aumentar o valor do limiar, o qual, surpreendentemente, torna-se infinito já para uma mistura meio-a-meio de acoplamentos. Deste modo, a produção de pares é inexequível se o acoplamento vetorial não exceder o acoplamento escalar, ainda que o potencial V_0 seja extremamente forte.

Investigamos agora o efeito da onda evanescente em $x > 0$, relacionado com a classe **B**. Neste caso, o estado estacionário além da barreira de potencial é descrito pela autofunção $\phi = B_+ e^{-|\kappa|x}$, de modo que a incerteza na posição, estimada como sendo o valor de x que torna a densidade igual a $1/e$ de seu valor em $x = 0$, redundando em $\Delta x = 1/(2|\kappa|)$, como acontece na teoria quântica não-relativística. Entretanto, contrariamente à previsão da teoria não-relativística, Δx apresenta o valor mínimo

$$(\Delta x)_{\min} = \frac{\hbar}{2(mc + g_s V_0/c)} \quad (5)$$

quando $V_0 = V_m = E/g_t$. Por meio desta última expressão vemos que $(\Delta x)_{\min} = \lambda/2$ no caso de um potencial vetorial puro ($g_s = 0$), em harmonia com o princípio da incerteza. Contudo, podemos concluir que $(\Delta x)_{\min} < \lambda/2$ no caso de um potencial vetorial contaminado com algum acoplamento escalar. À primeira vista isto parece um resultado desastroso por violar o princípio da incerteza de Heisenberg. Liberta-se desta danação considerando-se que o componente escalar do potencial contribui para alterar a massa da partícula. Realmente, definindo a massa efetiva como $m_{\text{ef}} = m + g_s V_0/c^2$ segue-se imediatamente que $(\Delta x)_{\min} = \lambda_{\text{ef}}/2$, onde o comprimento de onda Compton efetivo é definido como $\lambda_{\text{ef}} = \hbar/(m_{\text{ef}}c)$. Então, a incerteza máxima no momento torna-se $(\Delta p)_{\max} = m_{\text{ef}}c$.

Em suma, exploramos a EKG em uma dimensão espacial por motivos de simplicidade. Consideramos potenciais externos com a mais geral estrutura de Lorentz e mostramos que, se a interação escalar é acoplada adequadamente, a EKG independente do tempo reduz-se à equação de Schrödinger independente do tempo no limite não-relativístico.

A análise do potencial degrau com uma mistura arbitrária de acoplamentos vetorial e escalar mostrou-se muito profícua. Três classes de soluções foram discernidas. Em todas essas três classes, o acoplamento escalar não desempenha papel explícito na determinação da velocidade de grupo, e nenhum papel na

determinação da densidade e da corrente. Na classe **C** foi visto que cargas positivas e negativas estão sujeitas a acoplamentos vetoriais de sinais contrários e igual acoplamento escalar. A interação escalar é independente da carga e assim age indiscriminadamente sobre partículas e antipartículas. Diz-se então que o potencial vetorial acopla com a carga da partícula e que o potencial escalar acopla com a massa da partícula. Pode-se, então, interpretar a possibilidade de propagação de antipartículas além da barreira de potencial como sendo devido ao fato que cada antipartícula está sujeita a um potencial efetivo dado por $(g_s - g_t) V_0$, destarte se $g_t > 1/2$ a antipartícula terá uma energia disponível (energia de repouso mais energia cinética) expressa por $(2g_t - 1) V_0 - E$, donde se conclui sobre a energia do limiar da produção de pares. Pode-se afirmar ainda que as partículas estão sob a influência de um potencial degrau ascendente de altura $V_0 = (g_s + g_t) V_0$, e que as antipartículas estão sujeitas a um potencial degrau efetivo de altura $(g_s - g_t) V_0$, um degrau ascendente (repulsivo) se $g_t < 1/2$ e descendente (atrativo) se $g_t > 1/2$.

A mistura arbitrária de acoplamentos no potencial degrau desvelou a inexequibilidade do mecanismo da produção espontânea de pares no caso em que $g_t \leq 1/2$, tanto quanto o aumento do limiar da energia de produção no caso em que $g_t > 1/2$. Outrossim, a presença de um acoplamento escalar revelou a possibilidade de localizar partículas em regiões do espaço arbitrariamente pequenas. Com efeito, a presença de um acoplamento escalar, por menor que seja, conduz a $(\Delta x)_{\min} \rightarrow 0$ quando $V_0 \rightarrow \infty$ sem que haja qualquer chance para a produção de pares na interface dos potenciais. Isto dito tendo em vista que V_m , o potencial que minimiza a incerteza na posição, é sempre menor que V_c , o potencial do limiar da produção espontânea de pares.

O limite não-relativístico da equação de Klein-Gordon, ou seja a equação de Schrödinger com energia de ligação $E - mc^2$, não diferencia o acoplamento vetorial do acoplamento escalar e pressupõe que $V_0 \ll mc^2$. Portanto, conclui-se seguramente que não há produção de pares $((V_c)_{\min} = 2mc^2)$ nem incerteza mínima na posição $((V_m)_{\min} = mc^2)$ no regime não-relativístico da equação de Klein-Gordon, como é esperado.

Referências Bibliográficas

1. GREINER, W., Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations. Berlim: Springer-Verlag, 1990.
2. STRANGE, P., Relativistic Quantum Mechanics with Applications in Condensed Matter and Atomic Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
3. BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D., Relativistic Quantum Mechanics. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1964.
4. SAKURAI, J. J., Advanced Quantum Mechanics. Reading: Addison-Wesley, 1967.
5. GROSS, F., Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory. Nova Iorque: Wiley, 1993.
6. KLEIN, O., Z. Phys., Vol. 53, p. 157-165, 1928.
7. WINTER, R. G., Am. J. Phys., Vol. 27, p. 355-358, 1959.
8. FU, M. G.; E. FURLANI, E., Am. J. Phys., Vol. 50, p. 545-549, 1982.
9. NI, J. -J.; ZHOU W.; YAN, J., Klein Paradox and Antiparticle, arXiv: quant-ph/9905044.
10. VILLAVICENCIO, J., J. Phys. A, Vol. 33, p. 6061-6072, 2000.
11. PAULI, W.; WEISSKOPF, V. F., Helv. Phys. Acta, Vol. 1, p. 709-731, 1934.